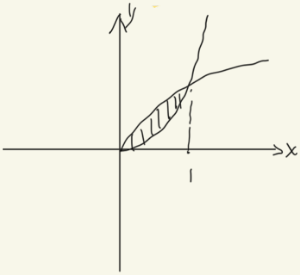
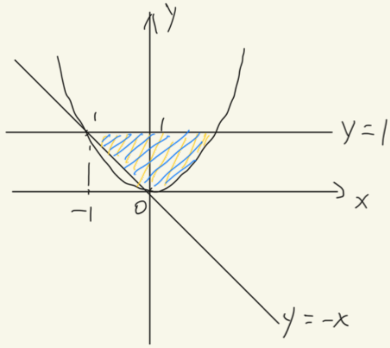
# 高数



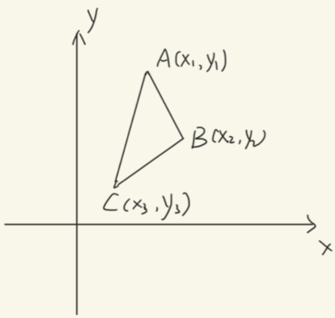




$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{3}$$

$$S=\frac{7}{6}$$

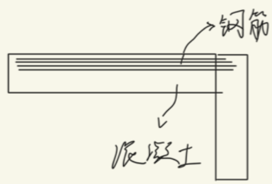



$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}\begin{vmatrix}x_i & y_i\\ x_{i+1} & y_{i+1}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}.$$

$r=a(1+\cos\theta)\quad(a>0)$


$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2(\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(\cos^2\theta+2\cos\theta+1)d\theta$$

## 平面图形求面积

方法一：平行直线分割法

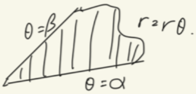
方法二：多边形逼近（沿区域边界曲线逆时针方向积分）

适用于：区域边界曲线分段光滑

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \alpha \le t \le \beta \end{cases} \qquad \boxed{\int_\alpha^\beta x\,dy = -\int_\alpha^\beta y\,dx}$$

方法三：射线分割

适用于广义扇形




$$\int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\theta)\,d\theta$$

## 立体的体积

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2n\,!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx = \frac{(2n-1)!!}{2n\,!!}$$

### 一、截面法

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$$

### 二、柱壳法

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

## 弧长公式：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta \qquad S = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

且 $x, y$ 不同时为0.

## 曲率

$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$ 弧微元

定义：$K = \left|\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$ 即 $k = |\alpha'(s)|$

$$\begin{cases} \alpha(t) = \arctan \frac{y'(t)}{x'(t)} \\ S(t) = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{\alpha'(t)}{S'(t)}\right| = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$ （参数方程形式）

对曲线的要求很高，二阶导must存在

若平面曲线 C $\begin{cases} \text{由 } y = f(x) \text{ 表示} & K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \text{由 } r = r(\theta) \text{ 表示} & K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$

圆上各点曲率相同，$K = \frac{1}{R}$（半径倒数）

微分方程的通解：未必包含所有解

设 $y=\varphi(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为 $n$ 阶微分方程的解，

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 相互独立指：$\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x)$ 关于

$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的雅可比行列式不为 0，

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

可变量分离的一阶微分方程.

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx \xrightarrow{\text{通解}} \int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx$$

$$\boxed{\begin{cases} g(y)\,dy = f(x)\,dx \\ \underline{y(x_0) = y_0} \end{cases} \text{的求解方法}}$$

若 $y=y(x)$ 是其解, 则

$$\int_{x_0}^{x} g(y(x))\,dy(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

即

$$\int_{y_0}^{y} g(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

$y=y(x)$ 由上述方程所确定

Malthus模型 → 资源充足，物种增长率

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \Rightarrow \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \int_{t_0}^{t} r\,dt$$

$$\boxed{N_t = N_0 \cdot e^{r(t-t_0)}}$$

优化：Logistic模型

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N\left(r - \frac{N}{N_m}r\right) \\ N(t_0) = N_0 \end{cases} \Rightarrow \int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N\left(r - \frac{N}{N_m}r\right)} = \int_{t_0}^{t} dt$$

即

$$\frac{1}{r}\int_{N_0}^{N} \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N_m - N}\right) dN = \int_{t_0}^{t} t$$

$$\boxed{N(t) = \frac{N_0 N_m e^{r(t-t_0)}}{N_m - N_0 + N_0 e^{r(t-t_0)}}}$$

# 可化为变量分离的方程——齐次方程

齐次微分方程：$\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ → 齐次代换

作代换 $\dfrac{y}{x} = u$，得

$$\boxed{x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u}$$

形如：$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ $(c_1^2+c_2^2 \neq 0)$ 的方程

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ 则 $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = k$，令 $u = a_2x + b_2y$

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx}$$

记 $f(u) = \dfrac{ku+c_1}{u+c_2}$

则 $\dfrac{du}{dx} = a_2 + b_2 f(u)$

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 存在 $\lambda_1, \lambda_2$，使得 $\begin{cases} a_1\lambda_1 + b_1\lambda_2 + c_1 = 0 \\ a_2\lambda_1 + b_2\lambda_2 + c_2 = 0 \end{cases}$

令 $x = u + \lambda_1$，$y = v + \lambda_2$

则 $\dfrac{dv}{du} = \dfrac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}$

# 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$$\boxed{y' + p(x)y} = q(x)$$

代换：$y = ue^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$

$$y' + p(x)y = 0$$

通解：$Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$

令 $u = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \cdot y$

即 $\boxed{u' = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \cdot q(x)}$

**常数变易法** ☆

则通解：$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left(\int q(x) e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + C\right)$

Bernouli 方程：$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$，$(\alpha \neq 0, 1)$

$$y^{-\alpha} \cdot y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

令 $\boxed{u = y^{1-\alpha}}$ 即 $u' = (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}$.

$$\boxed{\therefore \frac{du}{dx} + (1-\alpha)p(x)u = (1-\alpha)q(x)}$$

$\downarrow$

成功变化为一阶线性微分方程.

$\downarrow$

常数变易法

## 二阶常系数线性齐次微分方程：

$$y''+py'+qy=0$$

设 $\lambda_1,\lambda_2$ 是 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的两根，则 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=-p\\ \lambda_1\cdot\lambda_2=q\end{cases}$

$$\therefore (y'-\lambda_1 y)'-\lambda_2(y'-\lambda_1 y)=0$$

令 $u=y'-\lambda_1 y$，则 $u'-\lambda_2 u=0$

$\therefore u=C_1 e^{\lambda_2 x}$，$y'-\lambda_1 y=C_1 e^{\lambda_2 x}$

$$\therefore y=\begin{cases}(C_1 x+C_2)e^{\lambda x} & (\lambda_1=\lambda_2)\\ C_1 e^{\lambda_2 x}+C_2 e^{\lambda_1 x} & (\lambda_1\neq\lambda_2)\end{cases}$$

即方程对应的特征方程是：

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

通解为：

$$y=\begin{cases}C_1 e^{\lambda_1 x}+C_2 e^{\lambda_2 x}, & \lambda_1\neq\lambda_2\\ (C_1 x+C_2)\cdot e^{\lambda_1 x}, & \lambda_1=\lambda_2\\ e^{ax}(C_1\sin bx+C_2\cos bx), & Re(\lambda)=a, Im(\lambda)=b \text{ 共轭虚根}\end{cases}$$

$$f'(x)\cos x - f(x)\cdot\sin x + 2f(x)\cdot\sin x = 1$$

$$f'(x)\cos x + f(x)\sin x = 1$$

$$\begin{cases} y' + y\cdot\tan x = \sec x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$即\left(\frac{y}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{y}{\cos x} = \tan x + C$$

$$C = 1$$

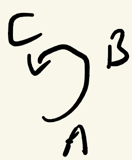
$$\therefore\ y = \sin x + \cos x$$

# 空间解析几何

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$




空间四点共面 $\Longleftrightarrow$ $\lambda=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}=0$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

平面及其方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

点法式：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

过定点 $(x_0,y_0,z_0)$，法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

截距式：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

三点式：

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

点到平面：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

面到面

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

# 空间直线

点法式：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

两点式：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

一般方程：

$$L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

平面束方程：

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

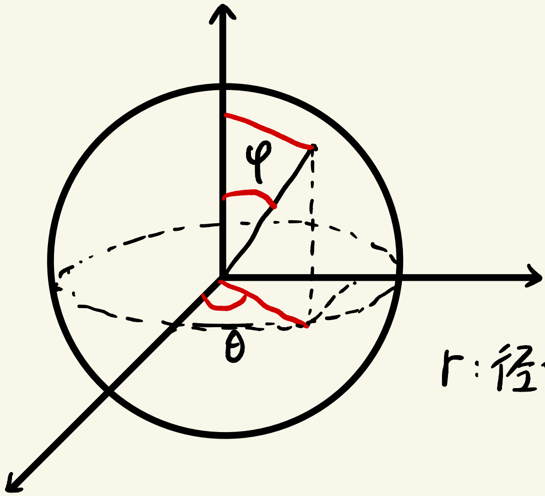
直线关系：

$$\vec{l_1}\cdot\vec{l_2}=0 \iff l_1 \perp l_2$$

$$\boxed{\begin{cases}\vec{l_1}\times\vec{l_2}\neq 0\\ (\vec{l_1}\times\vec{l_2})\cdot\vec{AB}=0\end{cases} \iff l_1, l_2 \text{ 共面}}$$

# 曲面及其方程

球面坐标系及参数方程：




$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\cdot\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

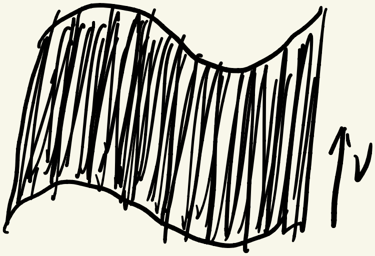
$r$：径向距离，$\varphi$：极角，$\theta$：方位角

极角：与z轴

方位角：投影与x轴.

# 柱面

$\vec{v} = (m, n, p)$ 母线

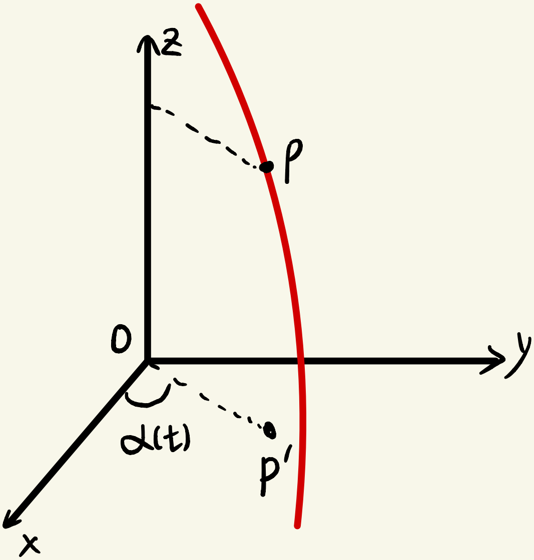



定向

$$\vec{r} = \underline{(x(t), y(t), z(t))} + \lambda(m, n, p)$$

$$\therefore \begin{cases} x = x(t) + \lambda m \\ y = y(t) + \lambda n \\ z = z(t) + \lambda p \end{cases}$$

# 旋转曲面:




$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ 绕z轴旋转

$$\begin{cases} x(t) = |\overrightarrow{OP'}| \cdot \cos\alpha(t) \\ y(t) = |\overrightarrow{OP'}| \cdot \sin\alpha(t) \end{cases}$$

$$= P\left(|\overrightarrow{OP'}| \cdot \cos(\alpha(t)+\theta),\ |\overrightarrow{OP'}| \cdot \sin(\alpha(t)+\theta),\ z(t)\right)$$

即
$$\boxed{\begin{cases} x = \underline{x(t)\cdot\cos\theta - y(t)\sin\theta} \\ y = \underline{x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta} \\ z = z(t) \end{cases}}$$

$x(t)\cos\theta - y(t)\sin\theta \to \cos(\alpha+\theta)$

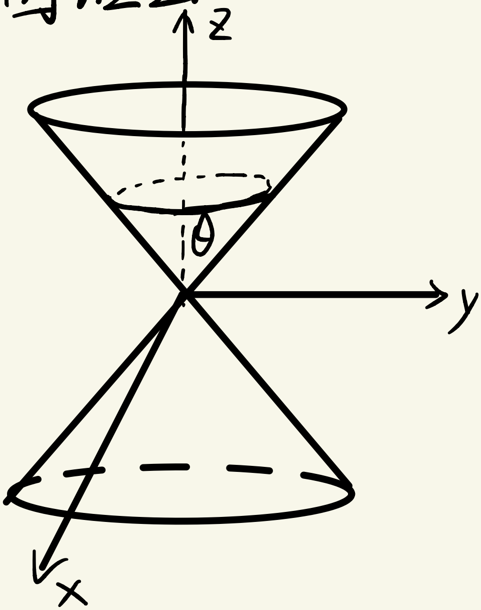
$x(t)\sin\theta + y(t)\cos\theta \to \sin(\alpha+\theta)$

同理，对于 $yz$ 坐标面上的曲线 $C: F(y,z)=0$.

$$\therefore \begin{cases} x = -y(t)\sin\theta \\ y = y(t)\cos\theta \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0}$$

圆锥面



# 二次曲面

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0$$

由坐标旋转及平移可得标准方程

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+b_1x+b_2y+b_3z+c=0$$

# 多元微分学

## 多元函数的极限与连续

$\boxed{\text{n维 Euclid 空间 } R^n}$

n维实向量

$$R^n = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in R,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

定义了线性运算，并定义了内积：

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad , \forall \vec{x}, \vec{y} \in R^n$$

$\boxed{\text{范数}}$

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

基本性质：

(1) 非负性：$\|\vec{x}\| \geq 0$，且 $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) 正齐次性：$\|k\vec{x}\| = |k|\|\vec{x}\|$ ，$\forall k \in R$

(3) 三角不等式：$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

Cauchy-Schwarz 不等式：

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

## 点间的Euclid距离

$$\|\vec{x}-\vec{y}\|=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

## 内点、外点、边界点 ☆

内点：$\exists\delta>0$，使得 $U(a,\delta)\subset A$ $\longrightarrow$ $\operatorname{int}A$（A的内部）

外点：$\exists\delta>0$，使得 $U(a,\delta)=\phi$ $\longrightarrow$ $\operatorname{ext}A$（A的外部）

边界点：$\forall\varepsilon>0$，使得 $U(a,\varepsilon)\neq\phi$ 且 $U(a,\varepsilon)\cap A^c\neq\phi$ $\longrightarrow$ $\partial A$（A的边界）

$$R^n=\operatorname{int}A\cup\operatorname{ext}A\cup\partial A$$

## 聚点，孤立点

聚点：$\forall\varepsilon>0$，$\mathring{U}(a,\varepsilon)\cap A\neq\phi$

A所有聚点的集合称为A的导集 $A'$

$\bar{A}=A\cup A'$ $\longrightarrow$ A的闭包

孤立点：$a\in A$，但不是聚点

$$\bar{A}=A\cup\partial A$$

## 开集与闭集

$A\subseteq R^n$ $\longrightarrow$ A是开集 $\Leftrightarrow$ $A^c$是闭集

开集：$\operatorname{int}A=A$

闭集：$\bar{A}=A$

约定：空集$\phi$既是开集也是闭集

## 紧集、连通集、凸集

紧集：有界闭集

凸集：$A\subseteq R^n$，$\forall x,y\in A$，$\forall t\in[0,1]$，有 $tx+(1-t)y\in A$.

## 多元函数的定义

$z=f(x)$ 或 $z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

特殊地，点集

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$ → 二元函数 $z=f(x,y)$

## 重极限 ☆

$f$ 满足 $D\subseteq R^n$，$x_0$ 是 $D$ 的聚点

若 $\exists A$，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，只要 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)\cap D$，

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

称 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

△若动点以不同的方式/路径趋于定点时，极限不同或不存在，

则函数的重极限不存在.

二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$、$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 并不相同

若三者均存在，则必相等，

若 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) \neq \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 不存在

## 连续的定义

$f$ 满足 $D\subseteq R^n$，$x_0$ 是 $D$ 的聚点，若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

称其连续。

一切多元初等函数在定义区域内连续。

| |
|---|
| 有界<br>最值<br>介值 |

三大定理。

# 偏导数

函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，$x$ 在 $x_0$ 处有增量 $\Delta x$

而 $y_0$ 处固定，则 $z$ 关于 $x$ 的偏增量 $\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$

若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \text{ 存在，}$$

则此极限为 $f$ 在 $(x_0,y_0)$ 处关于 $x$ 的偏导数.

△ 对于多元函数 偏导存在 $\not\Leftrightarrow$ 连续

# 高阶偏导

☆ 若 $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 都在 $(x_0,y_0)$ 处连续，则必有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$

# 全微分

## 定义

一元函数 $y=f(x)$ 的微分：$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = A\Delta x + o(\Delta x)$

设函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

若

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (\rho\to 0)$$

则称 $f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微，$A\Delta x+B\Delta y$ 为在 $(x_0,y_0)$ 处的全微分，记为

$$dz\big|_{(x_0,y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$$

$z=f(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 可微的等价定义：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x+\beta\Delta y \quad (\rho\to 0,\ \alpha,\beta \text{为无穷小})$$

$\rho\to 0$ 时，

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) = A\Delta x + B\Delta y + \frac{o(\rho)\Delta x}{\rho^2}\Delta x + \frac{o(\rho)\Delta y}{\rho^2}\Delta y$$

$$\left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\rho}\right| \le |\alpha|+|\beta| \Rightarrow \alpha\Delta x+\beta\Delta y = o(\rho)$$

故有 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

可微的必要条件：

$f$在$(x_0,y_0)$处连续，两个偏导存在，且 $dz|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$

可微的充分条件：

$f$在$(x_0,y_0)$某邻域内偏导存在，且$f_x$，$f_y$在$(x_0,y_0)$处连续

# 多元复合函数的全微分

定理：

$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在$(x,y)$处可微，$z=f(u,v)$在$(u(x,y),v(x,y))$处可微，则

$$dz=(f_u u_x+f_v v_x)dx+(f_u u_y+f_v v_y)dy$$

相应的，

$$\Delta u=u_x\Delta x+u_y\Delta y+o(\rho)$$

$$\Delta v=v_x\Delta x+v_y\Delta y+o(\rho)$$

$$\Delta z=f_u\Delta u+f_v\Delta v+\alpha\Delta u+\beta\Delta v$$

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. $(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$时，$\alpha,\beta$为无穷小

而$\rho\to 0$时，$(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$

代入后得,

$$\Delta z = (f_u u_x + f_v v_x)\Delta x + (f_u u_y + f_v v_y)\Delta y + f_u o(\rho) + f_v o(\rho) + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$$

$\rho \to 0$ 时,

$$\frac{\alpha\Delta u}{\rho} = \alpha\left(u_x\frac{\Delta x}{\rho} + u_y\frac{\Delta y}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho}\right) \to 0$$

$$\frac{\beta\Delta v}{\rho} = \beta\left(v_x\frac{\Delta x}{\rho} + v_y\frac{\Delta y}{\rho} + \frac{o(\rho)}{\rho}\right) \to 0$$

故有:

$$\Delta z = f_u\Delta u + f_v\Delta v + \alpha\Delta u + \beta\Delta v$$

☆ 一阶全微分形式的不变性

$$df(u,v) = f_u du + f_v dv$$

# 多元复合函数的求导法则

**定理:**

函数 $u=\varphi(t)$ $v=\psi(t)$ 在点 $t$ 可导，$z=f(u,v)$ 在对应点 $(u,v)$ 有连续偏导数

则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$ 在点 $t$ 可导，且

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt}$$

证明：令 $x$ 有增量 $\Delta x$.

$$\therefore \Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v+\alpha\Delta_x u+\beta\Delta_x v$$

$(\Delta u,\Delta v)\to(0,0)$ ，$\alpha,\beta$ 为无穷小，两边同除 $\Delta x$ 并令 $\Delta x\to 0$

得证.

△ 中间函数多元用 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ，一元用 $\frac{df}{dx}$.

☆ 全微分形式的不变性：

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

# 隐函数的求导公式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$ → 本质上是全微分的变形

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

☆ 条件：

(1) $F$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 内连续

(2) $F(x_0, y_0) = 0$ （初始条件）

(3) $F$ 在 $U(P_0)$ 内有连续的偏导函数 $F_y$

(4) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

拓展：

$F(x, y, z)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

# 方程组所确定的隐函数组求导

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$ 可微且 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 可微，则

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0 \\ G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\therefore \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}}$$

且 $\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0$ F, G关于u,v的Jacobi行列式，记为 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

$$J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \\[2em] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)} \end{cases}$$

# 多元微分学的几何运用

切线方程： $l$: $\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)} = \dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)} = \dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$

曲面的切平面： $F(x,y,z)=0$ ，在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 可微

$$F_x(x-x_0)+F_y(y-y_0)+F_z(z-z_0)=0$$

空间曲线的切向量：

曲线一般方程 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} \vec{n_1}=(F_x,F_y,F_z) \\ \vec{n_2}=(G_x,G_y,G_z) \end{cases} \quad \therefore \vec{\tau}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(F_x,F_y,F_z)\times(G_x,G_y,G_z)$

# 方向导数与梯度

$f(x,y)$在$P(x_0,y_0)$处可微，$\vec{l}$为任一方向，$\vec{l_0}=(\cos\alpha,\cos\beta)$.

则 $\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_P$ 存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_P = f_x(x_0,y_0)\cdot\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

若$f$可微，$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \nabla f\cdot\vec{l_0} = \|\nabla f\|\cos\theta$.

$$\mathrm{grad} f \,/\, \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$$

# 多元函数的极值与最值

**极值必要条件：**

$f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处存在偏导数，且点$(x_0,y_0)$处取得极值（≠最值），则

$f_x(x_0,y_0)=0 \qquad f_y(x_0,y_0)=0$

# 可导、连续、可积、可微之间的联系(多元)

$$
\begin{tikzcd}
\text{可导} \arrow[r] & \text{连续} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{可积} \arrow[d] \\
\text{可微} \arrow[ur] & & \text{有界} \\
\text{偏导连续} \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

# 期中复习：流程 SOP

- 微分方程：构造法(配凑)
  - $f(x)dx = g(y)dy$
  - $u = \frac{x}{y}$，$u = xy$，$(f(x))' = g(x)$
- 混合偏导：算！
- 空间解析几何：向量
  - 平面系
  - 叉乘、混合积
  - 法向量，切线.
- 多元极值：拉格朗日数乘法
  - 表达式 + λ·条件
  - 条件最值.
- 多元连续与全微分：
  - 列式 + 定义
  - 极 $\leftrightarrow$ 直.

# 重积分

## 二重积分的概念与性质

积分SOP：

1. 分割
2. 近似
3. 求和
4. 取极限

本质依旧是 Riemann 和的极限.

$\boxed{\text{定义:}}$ $f(x,y)$ 为定义在有界闭区域 $D$ 上的有界函数，将 $D$ 分割为 $n$ 个小区域 $\Delta\sigma_1,\cdots,\Delta\sigma_n$. $\|T\|=\max\{d(\Delta\sigma_i)\}$,

$d(\Delta\sigma_i)=\max\{|P_1P_2|\,|\,P_1,P_2\in\Delta\sigma_i\}$.

任取 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，若存在常数 $I$，使得

$$\boxed{\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=I}$$

则称 $f$ 在 $D$ 上可积.

记号：$\displaystyle\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D f(x,y)\,d\sigma$

$d\sigma$ 也可记为 $dxdy$

值仅与 $f$ 与 $D$ 有关.

## 存在条件

$D$为有界闭区域，$f(x,y)\in C(D)$，则$f$在$D$上可积

$D$为有界闭区域，$f(x,y)$在$D$上有界，且除去有限个点或有限个光滑曲线外都连续，则$f$在$D$上可积

## 线性性质

$$\iint_D (k_1 f + k_2 g)\,d\sigma = k_1\iint_D f\,d\sigma + k_2\iint_D g\,d\sigma$$

$$\iint_{D_1\cup D_2} f\,d\sigma = \iint_{D_1} f\,d\sigma + \iint_{D_2} f\,d\sigma$$

$f$在$D$上可积，则$|f|$在$D$上可积，且

$$\left|\iint_D f\,d\sigma\right| \le \iint_D |f|\,d\sigma$$

## 积分中值定理

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\,S_D$$

# 二重积分的对称性

(1) 若 $D$ 关于 $x$ 轴对称

① $f(x,y)$ 关于 $y$ 为偶函数

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$$

② $f(x,y)$ 关于 $y$ 为奇函数

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = 0$$

(2) 若 $D$ 关于 $y$ 轴对称

① $f(x,y)$ 关于 $x$ 为偶函数

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma$$

② $f(x,y)$ 关于 $x$ 为奇函数

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = 0$$

(3) 若 $D$ 关于 $l: y=x$ 对称

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \frac{1}{2}\iint_D \left(f(x,y)+f(y,x)\right)d\sigma$$ $\Rightarrow$ 轮换对称性.

# 二重积分的计算：直角坐标系

## 矩形域

$f(x,y)$在矩形域 $[a,b]\times[c,d]$上可积，且

(1) 对 $\forall x\in[a,b]$，$\int_c^d f(x,y)dy$ 存在

(2) 累次积分 $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ 存在.

则有

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx}$$

## X型区域

垂直于x轴的直线与边界至多交于两点，若$f(x,y)$，$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \quad \text{(先y后x)}$$

## Y型区域

垂直于y轴的直线与边界至多交于两点，若$f(x,y)$，$\psi_1(y)$，$\psi_2(y)$连续，则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy \quad \text{(先x后y)}$$

几何含义：立体体积，质量..

# 二重积分的计算：变量变换

## 极坐标变换

xy 坐标系下扇面域 $D_\varepsilon$：$\varepsilon \le \rho \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi - \varepsilon$.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{对应}} \Delta_\varepsilon = [0, 2\pi-\varepsilon] \times [\varepsilon, R]$$ ，故

$$\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Delta_\varepsilon} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\theta d\rho.$$

## 变量变换公式

$f(x,y)$ 在有界闭域 $D$ 上可积，变换 $T$：$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$，$D' \longrightarrow D$ 且满足：

(1) $\varphi, \psi$ 在 $D$ 上具有连续的偏导函数

(2) 在 $D$ 上 $J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$

则有

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{T^{-1}(D)} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\,|J(u,v)|\,dudv.$$

# 三重积分

若存在常数I使得

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i = I$$

则称f在Ω上可积，I为f在Ω上的三重积分，记作

$$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv \quad \text{或} \quad I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

## 计算方法

tips：找对称，找圆，找整体

①先一后二

关键：描述边界

②先二后一

## 极坐标

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \longrightarrow dx\,dy\,dz = dv = \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega} F(\rho,\varphi,\theta)\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta.$$

# 重积分的应用

## 空间曲面的面积

对于 $z=f(x,y)$ 曲面 ($xOy$ 投影)

$$A=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

## 质心

密度 $\rho=\mu(x,y)$.

$$\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D x\,\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D y\,\mu(x,y)\,d\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\,d\sigma}$$

# 曲线积分与曲面积分

## 对弧长的曲线积分

$\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta s_i$，若极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i = J$，

则称 $J$ 为 $f(x,y,z)$ 在 $L$ 上的对弧长的曲线积分，记作：

$$\int_L f(x,y,z)\,ds$$

**计算方式** 设 $f(x,y)$ 在 $L$ 上有定义且连续，

$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$，若 $x,y$ 有一阶连续导数且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$

$$\int_L f(x,y)\,ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt \quad (\alpha<\beta).$$

注：以长度为微元的积分 $\int_L$ 描述函数 $ds$

eg. 质量相关，转动惯量等.

# 对坐标的曲线积分

$\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta s_i$ 若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\vec{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\left(P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right) = J$$

且 $J$ 与分割点 $(\xi_i,\eta_i)$ 的选取无关，则称 $J$ 为 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 沿有向曲线 $L$ 的对坐标的曲线积分，记为

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

**计算方式** 设 $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 为定义在光滑有向曲线

$$L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta].$$ 的连续向量函数.

则 $$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

注：以矢量坐标为微元的积分 $\int_L \vec{A}\,d\vec{s}$

## 两类曲线积分之间的关系 △

引入有向曲线弧的切向量 $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = \varphi'(t)\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}$$

$$\cos\alpha = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}, \quad \cos\beta = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$$

故，

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\,ds$$

即

$$\boxed{\int_\Gamma \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \vec{A}\cdot\tau\,ds}$$

$\vec{A} = (P, Q, R)$, $\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$d\vec{r} = \vec{\tau}\,ds = (dx, dy, dz)$

# 格林公式及其应用

格林公式：

$$\boxed{\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L Pdx+Qdy}$$

描述了平面区域上的二重积分与区域边界上的曲线积分之间的关系.

规定：沿 $L$ 绕行时，区域在左边，$L$ 为正向.

应用：

△ 曲线积分与路径无关的条件：

① $\int_{L_1} Pdx+Qdy = \int_{L_2} Pdx+Qdy$

② $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ △

△ 二元函数全微分求积：

$\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ （全微分）

$du(x,y)=u_x(x,y)dx+u_y(x,y)dy.$

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy.$

# 对面积的曲面积分

△第一类积分：

$\|T\| = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta S_i$，若极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i = J$，

且 $J$ 与分割点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 无关，

则称 $J$ 为 $f(x,y,z)$ 在 L 上的对弧长的曲线积分，记作：

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS.$$

计算方式：设曲面 $\Sigma$：$z = z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$ 且 $f(x,y,z)$ 连续.

则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,dxdy.$$

# 对坐标的曲面积分

△ 第二类积分：

$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$，点 $(x,y,z)$ 指定侧的单位向量 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则有对坐标的曲面积分：

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS.$$

**计算方式：**

记 $d\vec{S} = \vec{n}\,dS = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\,dS$

△ $dydz = \cos\alpha\,dS$，$dxdz = \cos\beta\,dS$，$dxdy = \cos\gamma\,dS$.

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy.$$

第二类积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 第一类积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 二重积分 ☆

**两类积分间联系：**

△ $$\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS$$

△ $$\iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

投影与重建.

# 高斯公式

Guass 公式是 Green 公式

$$\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \iint_{D} (\nabla\cdot\vec{F})\,d\sigma$$

在3维空间的推广.

## Guass 公式:

散度是通量的体密度

$$\boxed{\oiint_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{f}\,dV}$$

流过边界的通量　　内部所有散度的贡献

△ 特别的.

$$V_\Omega = \frac{1}{3}\oiint_{\partial^+\Omega} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$$

注:

$$\operatorname{div}\vec{F} = \nabla\cdot\vec{F} = \lim_{n\to 0}\frac{\oiint_{\partial\Omega_n}\vec{F}\cdot\vec{n}\,ds}{V} = \frac{\iiint_{\Omega_n}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz}{V} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

# 斯托克斯公式

Guass 公式是 Green 公式

$$\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dS = \iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{k}\,d\sigma$$

在3维空间的推广.

## Stokes 公式:

旋度是环量的面密度

$$\underbrace{\iint_{\Sigma}(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS}_{\text{曲面上旋度的贡献}} = \underbrace{\oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dS}_{\text{围绕边界的环量}}$$

$\tau$ 为 $\partial\Sigma$ 的单位切向量.

$\vec{F}=(P,Q,R)$

记: $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$

$$\oint_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \oint_{\Gamma}\vec{F}\cdot\vec{\tau}\,dS$$ 场 $\vec{F}$ 沿有向 $\Gamma$ 的环流量.

# 无穷级数

## 常数项级数的性质与概念

**定义:**

给定一个无穷数列$\{a_n\}$，各项用加号相连的表达式 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$，可写作$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，称为数项级数.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的前n项之和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 称为部分和.